



TITLE:

流れる粉体

AUTHOR(S):

御手洗, 菜美子

CITATION:

御手洗, 菜美子. 流れる粉体. 物性研究 2009, 91(4): 371-401

ISSUE DATE:

2009-01-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/142748>

RIGHT:

流れる粉体¹

九州大学 理学院 御手洗 菜美子²

(2008 年 11 月 17 日受理)

概要

本稿では、粉体の流れと、その連続体記述を中心に紹介する。粉体は巨視的な大きさを持つ粒子の集まりであり、粒子の持つ運動エネルギーはいずれ熱に散逸されてしまう。従って、粉体流を維持するには外部からのエネルギーの流入が必要であり、流入と散逸のバランスによって様々な振る舞いが見られる。まず最初に、流入エネルギーが大きく、二体衝突が主な相互作用となる流れと、流入エネルギーが小さく、長時間の接触がおこる流れの違いについて、粒子が硬い極限の振る舞いを参照しながら考える。次に、衝突が支配的な流れについて、非弾性剛体球の運動論に基づいた流体モデルによる解析を紹介する。最後に、高密度な粉体流について広くなりつつことが知られている、せん断応力が速度勾配の二乗に比例するという「バグノルド則」に触れ、関係する知見を紹介する。

1 はじめに

乾いた砂は、その上に立つことができるほど強固かと思えば、掬い上げたそばからさらさらと流れ落ちてしまう。砂に代表される、粉体の固体とも流体ともつかない不可思議な動力学は、古くから多くの人を魅了してきた [1, 2]。その奇妙な振る舞いの原因は、粉体が肉眼で見える程度の巨視的な粒で構成されていることにある。流れている粉体を放っておけば、いずれ粒子の運動エネルギーは熱に散逸され、運動は止まってしまい、「固体」となる。しかし少し外力を与えれば、また流れ出し、「流体（気体/液体）」状態になる。これは、与えられた温度の下で放っておけば固体/液体/気体のままである通常の分子で構成された物質とは、大きく異なっている。

外力によって様々な変化する粉体の流動の様子をみる事ができる身近な例として、斜面を流れる粉体を考えてみよう。傾斜角が十分大きいと、個々の粒子が大きな運動エネルギーをもって飛び回っては衝突し、速度勾配が大きく低密度な流れが実現する。このような流れはしばしば「衝突流」や「高速流」などとよばれる。これは、分子系とのアナロジーでいえば、粉体「気体」的な状況といえよう。一方、傾斜角を小さくしていくと、流れはだんだんと遅く、また高密度になり、ある傾斜角以下では流れが停止して「固体」になる。この閾値近くの流れにおいては、瞬間的な衝突に加え、長時間の接触による摩擦や、接触した粒子の不均一なネットワークに沿って力が伝わる応力鎖など、様々な複雑な相互作用があらわれると考えられており、「高密度流」や「摩擦流」などと呼ばれる。こちらは「液体」と例えられるかもしれない。

¹本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

²E-mail: namiko@stat.phys.kyushu-u.ac.jp

本稿では、粉体の物理の中でも「流れる粉体」について、筆者の研究とその周辺的话题を中心に紹介する。まず、粉体の流体領域-「液体」と「気体」をもう少し解説したあと、身近な例として斜面上の粉体流の振る舞いを参照しながら、それぞれの領域の振る舞いを紹介していく。最初に、強く励起されて密度の低い流れと、励起が非常に弱く密度の高い流れの違いを、粒子の硬い極限の振る舞いを考えるという視点から紹介する。次に、斜面上の低密度な粉体流の、運動論に基づく連続体モデルによる解析を紹介する。最後に、粉体流の広い密度範囲で成り立つ「せん断応力が速度勾配の二乗に比例する」というバグノルド則と、関係する研究を紹介する。

1.1 流れる粉体

粉体：大きくて硬い粒子 まず、本記事で取り扱う「粉体」を、もう少し限定しておこう。粉体、又は粉粒体は、直径が最低でも $1\mu\text{m}$ かそれ以上の粒子の集まりである。従って、熱揺らぎは重心運動に影響しない。また、本稿では、空気などの空間を満たす流体は、粒子の運動に影響を及ぼさない状況を考える。さらに、粉体粒子は乾いており、粒子間の引力の影響は無視できて、相互作用は、接触時の弾性力と散逸力（摩擦力）が主であるとする。このような設定を満たす粉体は、しばしば「乾燥粉体」とよばれる [1, 2]。

接触力について特徴的なのは、その硬さである。よく基礎実験に用いられるガラスビーズの場合、ヤング率は 70GPa 程度、岩石の場合も同程度かそれ以上であり、非常に硬く、身の回りの力のスケールではなかなか変形は起こらない³。一方散逸力については、微小な塑性変形や熱の発生など、様々な要因で生じうる。特に、接線方向の抵抗力が、法線方向に加えられた力に比例するというクーロンの摩擦法則もよく知られているが、微視的な起源やクーロン則への補正、物体同士が回転するときの摩擦力などには不明な点も多い [2, 3]。また、粉体粒子の散逸を特徴づける際には、しばしば反発係数が用いられるが、厳密には定数というわけではなく、その微視的な起源は現在でも研究課題となっている [4, 5]。

流れる粉体の性質 固く散逸のある乾燥粉体粒子の集団は、分子の集団とは大きく異なる興味深い振る舞いを示す [1, 2, 8]。

粉体の様々な振る舞いの中でもっとも理解が進んでいるのは、「気体」領域である。粉体が強く励起されると、粒子が空間を飛び回り、ときどき他の粒子を衝突しては向きを変える、という通常の気体分子のような状況が実現する。但し、分子で構成された通常の気体との違うのは、衝突のたびに粒子がエネルギーを失ってしまうということだ。従って、外部からエネルギーを注入しつづけることが、系を「気体」状態に保つためには不可欠である。

図 1(a)、図 2(a) には、気体的な状況の例として、斜面上を流れる低密度な粉体の定常流 [9–12] を示した。傾斜角は比較的大きく、また床の凸凹により様々な方向に粒子が散乱されるようになっているため、粒子が大きな運動エネルギーをもって空間を飛び回っている様子が見て取れる。

³ 地すべりなどの大規模現象では、非常に強い力がかかりうる。ただ、その際には、粒子の変形だけでなく、破壊が生じる可能性に留意すべきである。本稿では、そのような場合については取り扱わない。

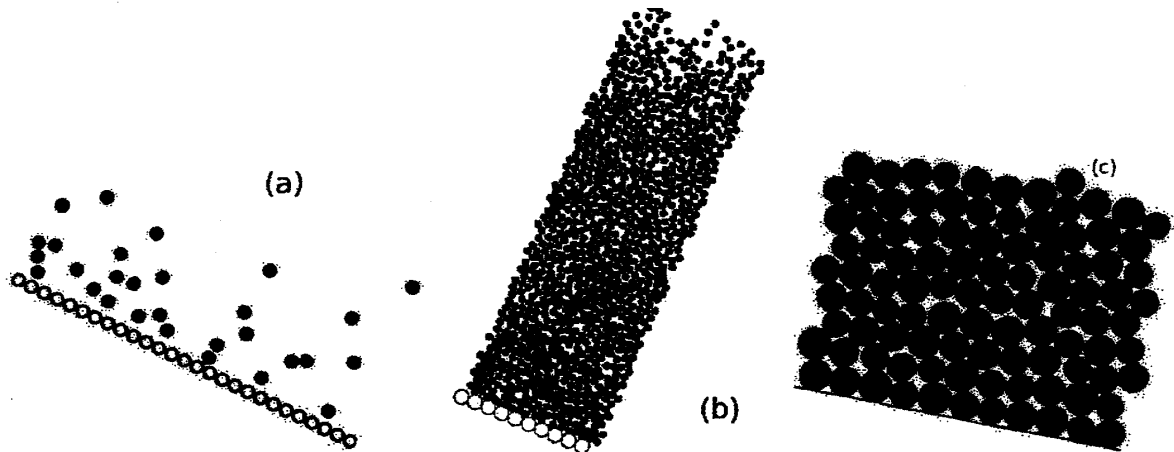


図 1: 低密度で速い流れ (a)、密度が高くせん断が全体にかかった流れ (b)、及び非常に高密度でせん断が床近くに集中した流れ (c) のスナップショット [6, 7]。

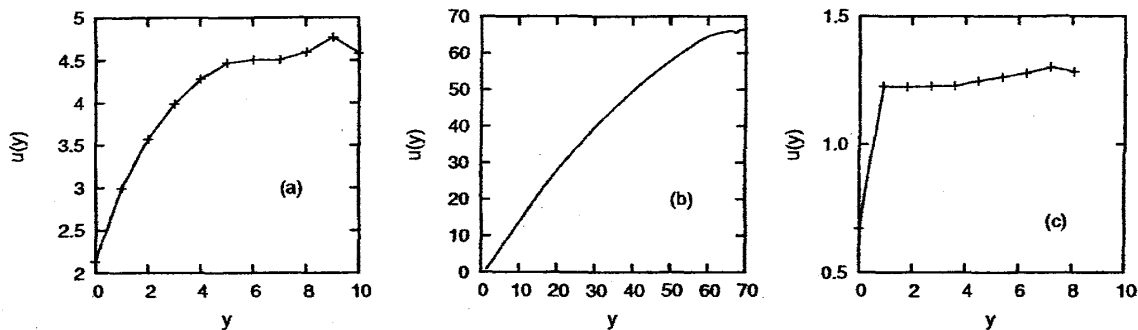


図 2: 図 1 の流れの平均速度の深さ (y) 依存性。図 1(a)(b)(c) がそれぞれこの図の (a)(b)(c) のスナップショットに対応している。 y 軸は斜面に垂直で、原点を斜面にとっている。長さの単位は粒子直径 σ 、時間の単位は重力加速度を g として $\sqrt{\sigma/g}$ にとった [6, 7]。

このように強く励起されつづけている系の相互作用は、主に二体衝突が支配的であると考えられ、剛体球の気体分子運動論を非弾性衝突に拡張した理論が提案されている [13–18]。特に、分子カオスを仮定して速度相関を無視した運動論に基づいて導かれた応力の表式、すなわち構成関係式は、工夫すればかなり高密度（三次元球の場合体積占有率 0.3～0.5 程度）まで、粉体気体を定量的にもよく記述することが知られている [19]。

しかし、非弾性衝突は、粒子間の相対速度を減少させるため、速度相関が育ちやすい [20]。そのため、エネルギー散逸が強くなるにつれて、速度相関を無視した運動論は疑わしくなる [21–23]。それに加えて、高密度になるにつれて、粒子の多体衝突や長時間接触もおこるようになり、二体衝突だけでは粒子間相互作用を表すことができなくなってくる。

身の回りでしばしばみられる、砂山の表面の雪崩などは、非常に高密度である [7, 24–28]。図 1(b)、図 2(b) には層厚が大きい場合の斜面上の定常流を示したが、粒子同士が接触している箇所が複数あるのが伺える。このような高密度な流れにおいては、瞬間的な二体衝突だけでなく、接触した粒子の鎖（応力鎖）による力の伝達 [29] も無視できないほど起こっているのではないかと

考えられる。

さらに高密度になってくると、粒子同士が常に接触した状態になる [30–32]。図 1(c) は、摩擦があるが凹凸のない床の上での定常流を示したが、接触が支配的であることが伺える。また、図 2(c) からわかるように、床に接触している層と次の層の間には大きな速度差があるが、流れの内部ではせん断がほとんどかかっておらず、固体状態に近い。一般に傾斜角が十分小さくなると、流れは完全に止まって「固体」になってしまう。

粒子が密につまって多少の外力をかけても動かなくなってしまう転移は、ジャミング (jamming) 転移とよばれ、粉体だけでなく、コロイド系、泡など、内部構造をもった離散系に多く見られるものである [33–36]。固体状態でも、粒子配置はランダムであり、応力鎖の複雑なネットワークが外力を支えている [37–40]。しかも、固体状態周辺での振舞いはしばしば履歴に強く依存し [41, 42]、理解するのは容易ではない。

このような複雑な粉体の静力学・動力学を統一的に扱える理論は今のところ存在しない。しかし、よく制御された実験と大規模な数値実験の積み重ねにより、その性質が整理されるとともに、背後に潜む物理の理解も少しずつ進みつつある。本稿では、上で挙げた斜面流の様々な振る舞いを例にとりながら、粉体流の特徴をみていきたい。

2 二体衝突と長時間接触：軟体球の剛体極限

1.1 節で述べたように、粉体粒子は硬く、散逸的な相互作用をするため、しばしばその衝突は反発係数で特徴付けられる。衝突時間は無限小だが反発係数が 1 より小さい球の集団は、一種の理想化された粉体系と考えることができるだろう。このような粒子は、しばしば「非弾性剛体球」とよばれ、理想粉体系としてその振る舞いが調べられてきた。

しかし、実際の粉体は剛体ではなく有限の硬さを持ち、衝突には有限の時間がかかる。そこでここでは、「反発係数を一定にたもったまま、粒子をどんどん硬くしていくと、何がおこるだろうか？」という問いをたててみよう。もちろん、単純な二体衝突は、反発係数一定の非弾性剛体球モデルに近づいていく。しかし、多くの粒子が相互作用する粉体流を有限の硬さの粒子で実現し、そこで上のような極限をとるとどうなるかは、まったく自明ではない。

この章ではまず、非弾性剛体球モデルと、有限の硬さを持った粉体粒子の相互作用モデルを紹介し、単純な二体衝突ではその二つが対応づけられることを示す。次に、図 1(a) の低密度な衝突流と、図 1(c) のかなり高密度な流れについて、硬い極限を数値的に比較する。その結果、前者は硬い極限では二体衝突のみで記述できるのに対し、後者はいくら硬くしても多体衝突や有限時間の接触が起こっていることが示唆される [6]。

2.1 粉体の相互作用モデル

2.1.1 非弾性剛体球 (inelastic hard-sphere) モデル

非弾性剛体球モデルでは、衝突にかかる時間は無限小であるとし、二体衝突の前後で速度や加速度がどう変わるかの規則を与える。

粉体粒子は質量 m 、直径 σ 、慣性モーメント J を持つとする。粒子 i と j が、衝突の瞬間それぞれ位置 \mathbf{r}_i と \mathbf{r}_j にあって ($\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ として $|\mathbf{r}_{ij}| = \sigma$)、衝突直前の速度と角速度がそれぞれ \mathbf{c}_i と \mathbf{c}_j 、 $\boldsymbol{\omega}_i$ と $\boldsymbol{\omega}_j$ であったとしよう。このとき、接触点の相対速度 \mathbf{v}_{ij} は、

$$\mathbf{v}_{ij} = (\mathbf{c}_i - \mathbf{c}_j) + \mathbf{r}_{ij} \times (\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_j), \quad (1)$$

と与えられる。また、法線方向の相対速度 \mathbf{v}_n と、接線方向の相対速度 \mathbf{v}_t は、法線ベクトル $\mathbf{n} = \mathbf{r}_{ij}/|\mathbf{r}_{ij}|$ を用いて

$$\mathbf{v}_n = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_{ij})\mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_t = \mathbf{v}_{ij} - \mathbf{v}_n, \quad (2)$$

となる。

衝突直後の法線方向と接線方向の相対速度 \mathbf{v}'_n 、 \mathbf{v}'_t を与える規則は様々にとれるが、よく用いられるのは反発係数を一定としたモデル

$$\mathbf{v}'_n = -e_p \mathbf{v}_n, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}'_t = -e_t \mathbf{v}_t \quad (4)$$

である。(3) と (4) に現れる e_p, e_t はそれぞれ法線方向、接線方向の反発係数で、散逸の程度を決めるモデルのパラメータである。これらの式と運動量 (角運動量) 保存則から衝突直後の粒子の速度 (角速度) が求まる⁴。

特に、 $e_t = -1$ (接線方向の相対速度が変わらない滑らかな粒子)、 $0 \leq e_p < 1$ の場合は、エネルギー散逸があるもっとも単純な相互作用モデルとして、よく調べられている。この場合について衝突直後の粒子 i 、粒子 j の速度 \mathbf{c}'_i 、 \mathbf{c}'_j を考えてみると

$$\mathbf{c}'_i = \frac{1}{2} [\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j + e_p \mathbf{v}_n], \quad (5)$$

$$\mathbf{c}'_j = \frac{1}{2} [\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j - e_p \mathbf{v}_n] \quad (6)$$

となる。このとき、衝突前後の運動エネルギーの変化 ΔE は

$$\Delta E = \frac{m}{2} [(\mathbf{c}'_i{}^2 + \mathbf{c}'_j{}^2) - (\mathbf{c}_i{}^2 + \mathbf{c}_j{}^2)] = -\frac{1}{4} m (1 - e_p^2) v_n^2 \quad (7)$$

となり、 $0 \leq e_p < 1$ のときエネルギーを失う非弾性衝突となる。また、このとき、(5)(6) から、衝突後には $|\mathbf{v}_n|$ だった法線方向の相対速度の大きさが、衝突後は $e_p |\mathbf{v}_n|$ に減少し、運動の向きが揃う傾向があることもわかる。

⁴接線方向の相互作用を考える場合は、クーロン摩擦を取り入れたもの [2] もよく用いられる。

非弾性剛体球モデルは、粉体の運動論による解析において広く採用されている。また、数値実験も数多く行われている。数値実験の際は、衝突イベント毎に時間を進めていくイベント駆動法を用いる必要がある。

2.1.2 軟体球 (Soft-sphere) モデル

次に、接触したときに弾性力と散逸力が働く軟体球モデル [2, 43–45] を簡単に紹介する。このモデルは、粉体工学で使われる粒子モデルの代表的なものであり、しばしば離散要素法 (Discrete (or Distinct) Element Method, DEM) というこのモデルを用いた数値実験を指すことがある。また、相互作用力の関数形は複数提案されているが [45]、ここでは線形の弾性力と速度に比例した摩擦力、及びクーロン摩擦を取り入れたモデルを紹介する。更に接線方向の力の表現を簡単にするため、粒子は二次元で回転軸は一次元に固定されているものとする。⁵

剛体球モデルと同様、粉体粒子は質量 m 、直径 σ 、慣性モーメント J を持つとする。粒子同士が接触していないとき $|r_{ij}| > \sigma$ は相互作用しない。粒子 i と j が接触しており ($|r_{ij}| \leq \sigma$)、その時の速度と角速度がそれぞれ c_i と c_j 、 ω_i と ω_j であったときの相互作用は以下のように与えられる：まず、接触点の相対速度 v_{ij} は、やはり (1) で与えられる⁶。また、時刻 t_0 で接触が始まったとき、時刻 t での法線方向の相対速度 v_n 、接線方向の相対速度 v_t 、接線方向の相対的な位置のずれ u_t は、

$$v_n = (n \cdot v_{ij})n, \quad v_t = (t \cdot v_{ij})t, \quad u_t = \int_{t_0}^t v_t dt, \quad (8)$$

となる。ここで、法線ベクトル $n = r_{ij}/|r_{ij}| = (n_x, n_y, 0)$ に対して、接線ベクトル $t = (-n_y, n_x, 0)$ を定義した。このとき、粒子 i から粒子 j に働く法線方向および接線方向の力 F_{ij}^n と F_{ij}^t は、次のように与える。

$$F_{ij}^n = mk_n(\sigma - |r_{ij}|)n - m\eta_n v_n, \quad (9)$$

$$F_{ij}^t = \min(|h_t|, \mu|F_{ij}^n|)(h_t/|h_t|) \quad (10)$$

で与えられる。ただし、 $h_t = -mk_t u_t - 2m\eta_t v_t$ で、 μ はクーロン摩擦係数を表す。

(9) 式の相互作用モデルは、力が粒子同士の重なり及び相対速度に対して線形に働くため、二体の正面衝突に対して、接触時間 τ_c 、および法線方向の反発係数 e_p (接触の瞬間と離れる瞬間の法線方向の速度の比) を解析的に求めることができ [45]、次のように与えられる。

$$e_p = \exp\left(-\frac{\pi\eta_n}{\sqrt{2k_n - \eta_n^2}}\right), \quad \tau_c = \frac{\pi}{\sqrt{2k_n - \eta_n^2}} \quad (11)$$

$0 < \eta_n < \sqrt{2k_n}$ であれば $0 < e_p < 1$ であり、衝突のたびにエネルギーが散逸する⁷。

⁵ 三次元のモデルは [26] などに見つけることができる。

⁶ 剛体球では $|r_{ij}| = \sigma$ であるのに対し、軟体球では $|r_{ij}| \leq \sigma$ であることに注意。

⁷ 同様の計算により、接線方向の相互作用 (10) 式についても、 $|h_t| < \mu|F_{ij}^n|$ の場合の接線方向の反発係数 e_t を求めることができる。

軟体球モデルを数値実験する場合は、通常時間ステップ dt を固定して運動方程式を数値積分する時間駆動法が用いられる⁸。

2.1.3 軟体球モデルの非弾性剛体球極限

軟体球モデルと非弾性剛体球モデルの対応を見てみよう。(11) 式をみると、反発係数 e_p が一定になるように $\eta_m = C\sqrt{k_n}$ (C は定数) の関係を保ちながら粒子の弾性のパラメータ k_n を大きくする (粒子を硬くする) ことができることがわかる。このとき二体衝突の接触時間 τ_c は、 $1/\sqrt{k_n}$ に比例して減少していく。つまり、反発係数を一定に保ったまま $k_n \rightarrow \infty$ の極限をとることで、接触時間がゼロで反発係数 $e_p < 1$ の非弾性剛体球極限をとることができるのである⁹。

2.2 粉体流の剛体極限

いよいよ、凹凸のある斜面上の希薄な速い流れ (図 1(a) : 以下「衝突流」とよぶ) と、平らな斜面上の高密度な遅い流れ (図 1(c) : 以下「摩擦流」とよぶ) について、粒子間の反発係数を一定に保ったまま硬い極限をとった場合の振る舞いを調べてみよう [6]。以下のデータは、粒子直径 σ 、粒子質量 m 、及び $\sqrt{\sigma/g}$ (g は重力加速度) を単位として無次元化されている。

数値実験では、粒子が十分硬ければ ($1/k_n \lesssim 10^{-5}$)、平均の運動エネルギーのような流れを巨視的に特徴づける量は、衝突流、摩擦流ともに系統だった硬さ依存性は示さないことが確認された [6]。

一方、衝突回数や接触時間は硬さに大きく依存し、しかも衝突流と摩擦流で明らかな違いを示した。単位時間当たりの衝突回数は、衝突流では硬い極限ではほぼ一定になるのに対し、(図 3(a)) 摩擦流では k_n に対して冪的に発散した (図 3(b))。このときの粒子の単位時間あたりの接触時間 t_c と、粒子間の衝突がすべて二体衝突であった場合の接触時間 $N_c \tau_c$ の差を硬さに対してプロットすると、衝突流では粒子が硬くなるにつれて急速にゼロに近づくのに対し (図 3(c))、摩擦流では、エネルギーなどが系統的な依存性を示さない $1/k_n \lesssim 10^{-5}$ の範囲でも硬さ依存性を示し、 k_n を大きくしてもなかなかゼロに収束しない傾向が見られた (図 3(d))。

つまり、流れの様相は、粒子が十分硬ければ、硬さへの依存性は見られなくなるが、衝突頻度を調べると、剛体極限で有限の値に収束する場合と、発散する場合とがある。有限の値に収束する場合は、その動力学は二体衝突で特徴づけられるといってよいであろう。一方、発散する場合は、二体衝突だけでは動力学を記述することができず、粒子が硬い極限でも多体接触が流れの中で生じていると結論づけられる。

摩擦流の剛体極限での衝突頻度の発散は、非弾性剛体球系における非弾性コラプスに対応している。非弾性コラプスとは、有限時間内に有限個の粒子の間で無限回衝突がおこる現象である。もっとも単純な例は、重力下で、水平な床に、反発係数一定の非弾性剛体球を落としたときの振る舞

⁸ 接触の有無で相互作用の有無が変わるため、接触判定の部分で dt のオーダーの誤差が入ってしまうモデルになっていることに注意が必要である。

⁹ $|h_i| < \mu |F_{ij}^n|$ の場合の接線方向の反発係数 e_t についても一定に保ったまま剛体極限をとることができる。

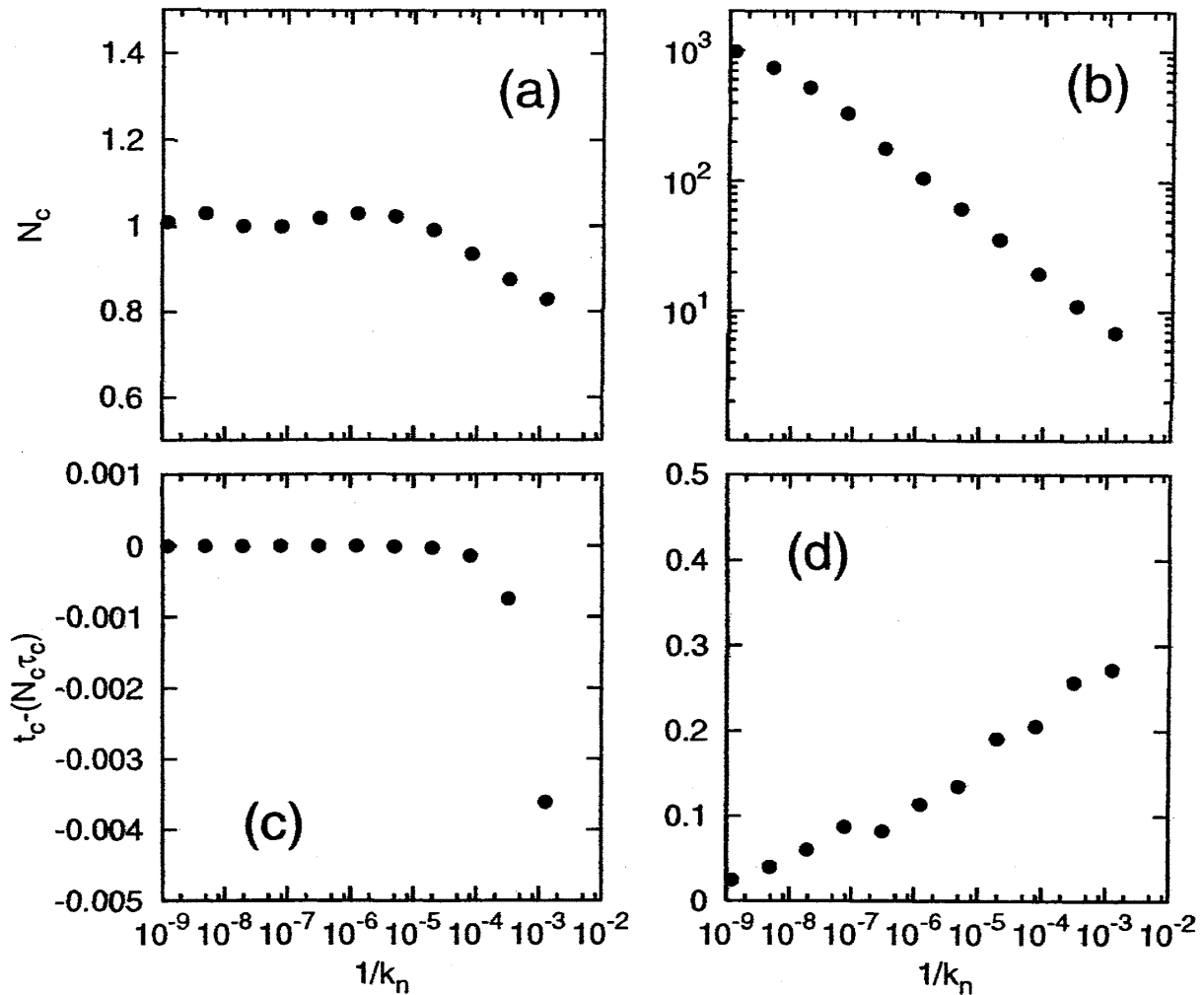


図 3: 単位時間当たりの粒子間の衝突回数 N_c (衝突流 (a)、摩擦流 (b))、及び単位時間あたりの接触時間と衝突がすべて二体衝突だったときの接触時間の差 (衝突流 (c)、摩擦流 (d))[6]。

いであり、有限時間内に床と無限回衝突して粒子が止まってしまうことがすぐにわかる。さらに、重力のような体積力がない状況でも、多体効果により非弾性コラプスがおこりうることは、一次元空間では解析的に [46]、2次元では数値的に確かめられている [47–51]¹⁰。また、せん断流がある系においても、非弾性コラプスは起こり得る [52]。非弾性コラプスがおこるということは、物理的には多体接触や長時間接触が起こることを示唆するが、剛体球系ではあらたな仮定を置かなければその先のダイナミクスは定義できない¹¹。摩擦流で軟体球の剛体極限を調べることは、このコラプスの振る舞いに軟らかい粒子の側から近づいていったことになる。

¹⁰4次元、5次元についても数値実験されており、非弾性コラプスがおこることが指摘されている [51]。3次元の系統的数値実験の文献はなぜか見付られなかったが、ご存知の方は教えていただければ幸いである。

¹¹例えば、相対速度がある閾値よりも小さくなった場合に反発係数を1に近づけることで、非弾性コラプスがおきないようにしたモデルの提案がなされている [53]。また、粒子を変形しない剛体とみなすが、与えられた境界条件を満たす配置を計算することで粒子同士が接触した場合も処理できる接触動力学 (Contact dynamics) 法とよばれる数値実験法もある [54–56]。しかし後者の方法については、アルゴリズムに含まれる繰り返し操作を有限回しか行わないことが、粒子の弾性を実効的に有限にしてしまうという指摘がある [56]。

この節では、図1(a)のような希薄な流れと、図1(c)のような非常に高密度な流れを比較したが、その間で衝突頻度や接触時間がどう移り変わるかは興味ある話題である。最近になって、大規模な数値計算によって、特に図1(b)のような高密度な流れでの、衝突頻度の振る舞い、接触時間とレオロジーの関係などが調べられつつある [57, 58]。

3 衝突流の運動論による解析

前の章で、粉体流の中には、二体衝突で記述できる場合と、多体衝突や長時間接触が無視できない場合とがあることをみた。この章では、粉体流の振る舞いを、連続体記述という観点から考えてみたい。

衝突が支配的な流れについては、冒頭でも触れたように、気体分子運動論を非弾性衝突に拡張した理論が、工夫すれば定量的にもよい結果を与えることが知られており、粉体系の運動論は今でも盛んに研究されている [13–18]。ここでは、この運動論に基づいた連続体記述の枠組みと、それを低密度な斜面流に適用した結果を簡単に紹介しよう。

3.1 粉体系の運動論に基づく流体方程式の枠組み

粉体系を流体モデルで記述しようとする場合、変数としては粒子数保存を表すための数密度場 n 、及び運動量保存を表すための速度場 \mathbf{u} を考えるのが自然である。ここで、 n 及び \mathbf{u} は、位置 \mathbf{r} 、時刻 t で粒子が速度 \mathbf{c} を持つ確率密度 (一分布関数) $f(\mathbf{c}, \mathbf{r}, t)$ を用いて

$$n(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n} \int \mathbf{c} f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c}, \quad (13)$$

と表される。エネルギーが保存する分子系の場合は、これらに加えて内部エネルギーを代表する温度を変数として取り扱うが、粉体系の場合は、エネルギーは保存量ではない。しかし、主に散逸が弱い場合を想定して、速度揺らぎで定義される粉体温度 T

$$T(\mathbf{r}, t) = \frac{m}{dn} \int (\mathbf{c} - \mathbf{u})^2 f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t) d\mathbf{c} \quad (14)$$

(d は空間次元) も流体変数として¹²、弾性系の流体方程式と並行した取り扱いを考えることで、粉体系の運動論及びそれに基づいた流体方程式の研究が発展した。但し、ここでの「温度」は、あくまでも粉体粒子の運動エネルギーの揺らぎの部分を表すものであり、通常の意味での温度とは異なることに注意が必要である。

¹²ここでは、粉体温度 T はボルツマン定数を 1 としてエネルギーの単位ではかる。

これらの変数に対する流体方程式は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) mn = -mn \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (15)$$

$$mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) \mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla \cdot \Sigma, \quad (16)$$

$$\frac{d}{2} mn \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) T = -\nabla \cdot \mathbf{q} - \Sigma : \nabla \mathbf{u} - \Gamma, \quad (17)$$

と表わされる。(15) 式は連続の式、(16) は運動方程式であり、応力テンソル Σ と外場 \mathbf{f} を含んでいる。エネルギーの方程式 (17) にあらわれる \mathbf{q} は、粉体粒子の揺らぎのエネルギーの流れという意味での「熱流」を表す。 Γ は、非弾性衝突によるエネルギー散逸を表わし、粉体系に特有の項である。

これらの流体方程式を閉じるには、応力テンソル Σ 、熱流 \mathbf{q} 、エネルギー散逸 Γ を流体変数 n, \mathbf{u}, T の関数として表す、構成関係式が必要である。衝突流については、この構成関係式が、非弾性剛体球の運動論に基づいて与えられている。

非弾性剛体球系の構成関係式を導出するには、一体分布関数 $f(\mathbf{r}, \mathbf{c}, t)$ の時間発展を知る必要があるが、それは二体衝突を通じて二体分布関数 $f^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, t)$ に依存する。一般に、 n 体分布関数は、 $(n+1)$ 体分布関数に依存しており、BBGKY 階層として知られている [59]。

この階層を閉じるための近似は様々なものがある。例えば、よく使われるエンスコッグ近似では、衝突の瞬間 ($|\mathbf{r}_{12}| = \sigma$) の二体分布関数を、一体分布関数を用いて次のように近似する [60, 61]:

$$f^{(2)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, t) = g_0(\nu) f(\mathbf{r}_1, \mathbf{c}_1, t) f(\mathbf{r}_2, \mathbf{c}_2, t) \quad (18)$$

ここで、 $g_0(\nu)$ は粒子直径 σ だけ離れたところでの動径分布関数であり、体積占有率 ν (n に比例する) に依存する。この近似では、 $g_0(\nu)$ を通じて静的な空間相関を取り入れていることになる。一方、速度相関については考慮されていない。

上のような近似をしても、せん断流がある場合の分布を求めることは通常できないので、更なる近似が必要である。弾性衝突の場合には、せん断流がない平衡状態では一体分布はボルツマン分布になるため、それを参照状態として、空間勾配で求める量を展開し、構成関係式を計算することが多い。しかし、非弾性系では、参照状態となる平衡状態が存在しないため、どのような状態を参照状態とすればよいかが自明ではなく、様々な提案がなされている [14, 16–18, 20, 62–67]。

ここでは、具体的な近似には深入りせず、運動論から得られる構成関係式の、大雑把な関数形を初等輸送論に基づいて議論してみる。 x 方向に流れがあり、空間変化は y 方向にしかない場合 ($n = n(y, t), \mathbf{u} = (u(y, t), 0, 0), T = T(y, t)$) を考えよう。すると応力テンソルは、対角成分が法線応力 N 、 xy 成分がせん断応力 S で与えられる。せん断応力 S は、 y 軸に垂直な断面における x 方向の運動量輸送で与えられ、初等輸送論では平均自由行程 (一般に密度の関数) を $\ell(\nu)$ として $m\gamma\ell(\nu)n\sqrt{T/m}$ に比例すると見積もられる。すると、せん断応力の構成関係式は、

$$S = f_2(\nu) m^{1/2} \sigma^{1-d} T^{1/2} \gamma \quad (19)$$

という形で表される。ここで、 $f_2(\nu)$ は、体積占有率 ν 及び反発係数などの物質パラメータに依存する無次元の関数である。同様な議論により、法線応力 N 、及び熱流束 q は

$$N = f_1(\nu)\sigma^{-d}T, \quad (20)$$

$$\Gamma = f_3(\nu)m^{-1/2}\sigma^{-d-1}T^{3/2}, \quad (21)$$

$$q = -f_4(\nu)m^{-1/2}\sigma^{1-d}T^{1/2}\partial_y T \quad (22)$$

と与えられる¹³。粉体系特有の項のエネルギー散逸率 Γ については、速度相関がなければ衝突一回あたりのエネルギー散逸が温度 T に比例し、衝突頻度が \sqrt{T} に比例して体積占有率に依存することから、

$$\Gamma = f_3(\nu)m^{-1/2}\sigma^{-d-1}T^{3/2}, \quad (23)$$

と見積もることができる。

運動論の枠組みでは、空間勾配の一次までを考える範囲内では、構成関係式は (19) 式から (22) 式の形に書くことが出来る。但し、 $f_i(\nu)$ は具体的な相互作用モデルに現れる反発係数や摩擦係数などのパラメータを含み、また体積占有率依存性の関数形も具体的計算における近似法などに依存する。

これらの関係式、特にせん断応力の式 (19) は、一見、粘性係数 η が速度勾配によらない定数であるニュートン流体を示唆しているように見える。もしこれが分子で構成された通常の流体であれば、エネルギーが保存量であることから、温度は独立な変数と考えることができる。そして、粘性発熱が小さく、外界が熱浴として働いて温度が一定とみなせるような場合は、(19) 式はニュートン流体を表すことになるだろう。

しかし、粉体系の場合には、「温度」がどのようにきまるかを、常に考えなければならない。粉体系には「熱浴」は存在せず、外力によるエネルギー流入がなければいずれは運動が止まってしまうことは、最初に述べたとおりである。エネルギー流入があれば、エネルギー方程式 (17) に従って温度が変化する。もし温度の速度勾配依存性が強ければ、ニュートン流体とは大きく異なる振る舞いが得られることがあり、これについては 4 章で述べる。

3.2 斜面上の衝突流

では、具体例として、(15)–(17) 式及び構成関係式 (19)–(23) を、図 1(a) のような希薄な斜面流に適用してみよう [9, 10, 68]。これはエネルギー方程式における熱流、粘性発熱、及び散逸の各項がどれも無視できない例となっており [69]、相互作用による散逸が弱い場合に実現しやすい。

3.2.1 境界条件

解を求めるためには境界条件を与える必要があり、壁との衝突による運動量及びエネルギーのやり取りを考慮した境界条件が提案されている。現象論的なもの [70, 71] から運動論に基づいた詳細

¹³ 非弾性剛体球系のでは、熱流束の項には一般に密度の勾配に比例する項も許されるが、通常その項の影響は温度勾配に比例する項に比べて小さい [62, 67]。

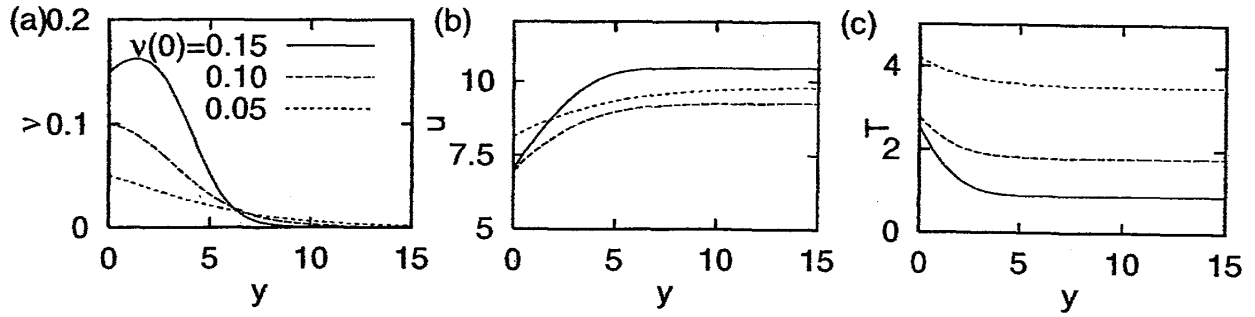


図 4: 傾斜角 $\theta = 16^\circ$ における定常解: 体積占有率 (a), 速度 (b), 温度 (c) の y 依存性を示した。線種は、床 ($y = 0$) での密度に異なる値を与えたときのそれぞれの解を表している [68]。

な計算 [72–74] まで、様々なものが存在するが、ここでは現象論的で単純な例を一つとりあげる。

斜面流の場合、まず固定された床において、運動量の釣り合いと熱流の釣り合いが要求される：

$$-n \cdot \Sigma \cdot t = \eta^*(\nu, T)|u_s|, \quad (24)$$

$$n \cdot q = -u_s \cdot \Sigma \cdot n - \Gamma^*(\nu, T), \quad (25)$$

ここで、単位ベクトル n は壁に垂直であり、 u_s は壁でのすべり速度、 $t = u_s/|u_s|$ はすべり速度の向きに添った単位ベクトルである。

最初の方程式 (24) は、壁での応力が、流れる粒子と壁の間の運動量のやり取りで決まっていることを表している。さらに、壁と粒子の衝突一回当たりの運動量輸送は、壁と粒子の速度差 u_s に比例すると考えられることから、(24) 式の右辺は、単位面積単位体積あたりの壁との衝突頻度を $\Omega(\nu, T)$ として、

$$\eta^*(\nu, T)|u_s| = \tilde{\phi}|u_s|\Omega(\nu, T), \quad (26)$$

と与えられる。 $\tilde{\phi}$ は境界の粗さをあらわすパラメータであり、 $\tilde{\phi}$ が大きいほど多くの運動量が壁に与えられることから、大きい ϕ はより粗い壁を表すと考えられることができる。

二番目の式 (25) はエネルギーの釣り合いの式であり、壁からの熱流は、有限のすべり速度による摩擦熱 (右辺第一項) と、壁と粒子の非弾性衝突によるエネルギー散逸 (右辺第二項) で決まっていることを表している。エネルギー散逸の項 Γ^* は、非弾性剛体球では衝突一回あたりの散逸が温度 T に比例すると見積もられることから、衝突頻度 $\Omega(\nu, T)$ を用いて

$$\Gamma^* = \tilde{\Phi} \cdot \frac{d}{2} T \cdot \Omega(\nu, T) \quad (27)$$

とあらわされる。パラメータ $\tilde{\Phi}$ は衝突あたりのエネルギー散逸率を特徴づける。衝突頻度 $\Omega(\nu, T)$ の関数形は運動論から与えられる。

3.2.2 定常流の振る舞い

第 3.1 節の構成関係式と第 3.2.1 節の境界条件に現れる関数 $f_i(\nu)$ 、 $\Omega(\nu, T)$ に、運動論によって求められた関数形 [62] を採用し、反発係数 e_p や床の粗さ $\tilde{\phi}$ などの物性定数を与えれば、数値的に

定常解を求めることができる¹⁴。ここで、傾斜角 θ と流す粉体の量は、コントロールパラメータとなっている¹⁵。

ある傾斜角において、斜面上の定常流の y 依存性を求めた結果を、図 4 に示した [68]。傾斜角 θ を固定しても、流量の異なる複数の定常解が存在することが、体積占有率のプロット図 4(a) から見て取れ、床でのすべり速度も様々である (図 4(b))。一方温度の振る舞い (図 4(c)) をみると、この例では床では摩擦による発熱が大きく、床から離れるにつれて散逸が勝ち、温度が下がっていることがわかる。

どの解においても、重力の影響により、遠方での体積占有率は指数関数的に減少する。一方、温度変化の大きい実線で示された解 ($\nu(0) = 0.15$) において、対応する体積占有率の空間変化を見てみると、 y に対して一端増加したあと減少する、という非単調な振る舞いを示している。これは、温度の振る舞い (図 4(c)) にみられる「床で熱せられて表面で冷やされる」効果が、重力に打ち勝ったためである。

3.2.3 定常流の安定性

図 4 における体積占有率の非単調な空間変化と、その背景にある「床で熱せられ、表面で冷やされる」という構造は、レイリー・ベナール対流がおこる状況と類似していることに気が付かれた方も多いだろう。実際、斜面流の実験において、渦と見られる筋状のパターンが観察され、対流が起こっている可能性が指摘された [75]。

このような不安定性の理解についても、運動論に基づく流体モデルが役に立つ。前節で得られた数値解について、線形安定性解析を行なうと、密度が深さ方向に非単調に変化する解がある領域では、対流に対応する不安定なモードがみられることが報告されている [76]。

また、低密度な斜面流の実験 [77] 及び数値実験 [9] によって、流れ方向に密度波が生じる不安定性も存在することが知られている。この場合についても、ここで用いた流体モデルを解析することで、密度波を誘起する長波長の不安定性が存在することが示されている [68]。これは、交通流における自然渋滞 [78–81] や、パイプ中の粉体流の密度波形成 [82–89]、薄膜流における不安定性 [90] と同様の機構による不安定性である。

3.3 粉体の運動論の課題

本節では、運動論に基づいた低密度な粉体流の解析を、斜面流を例にとって紹介した。運動論は、現在のところ粉体系ほぼ唯一の微視的かつある程度定量的な理論といえるが、まだ完成しているわけではない。

粉体の運動論の拡張という視点では、例えば巨視的な粒子の回転の影響を取り入れるため角速度場も変数として取り扱う極性流体モデルの適用が研究されている [10, 91–94]。また、異なる大

¹⁴斜面流ではさらに、流れの表面での境界条件を与える必要があるので、「無限遠では応力と熱流がゼロになる」という条件を課すことにする。

¹⁵実際に計算してみると、定常解が得られるのは有限の傾斜角の範囲内に限られる [68]。

きさの粒子が集まった多分散系への拡張や、多分散系に付きまとう偏析現象への運動論の応用なども検討されている [19, 95–98]。

また、どの程度高密度まで、及びどの程度強い散逸まで運動論に基づいた構成関係式が適用できるかも課題である。この点については、次の章で触れる。

粉体の運動論は、そもそも熱平衡状態を持たない系の微視的な振る舞いと巨視的な振る舞いをつなぐものとして、非平衡統計物理学の基礎的な観点からも興味深い研究対象である [15, 18, 20, 65, 99–101]。本節では運動論の具体的詳細には立ち入らず、衝突流への応用という観点しか紹介しなかったが、さらに興味ある方は文献を参照していただきたい。

4 高密度な粉体流とバグノルド則

導入部で述べたように、粉体流の密度が高くなるにつれ、粒子間に様々な相関が発達し、また粒子同士の多体接触も起こりやすくなる。そのような状況では、粒子同士の相互作用を二体衝突のみに限定したり、構成関係式を導出する際に速度相関を無視する近似を用いると、正しい結果が得られない。

しかし、そのような高密度な粉体流でも、広く成り立つと信じられている法則がある。それが、せん断応力が速度勾配の二乗に比例する、というバグノルド則である。この章では、バグノルド則を中心に、高密度な粉体流の振る舞いを紹介する。

4.1 バグノルド則

バグノルド (R. A. Bagnold, 1896-1990) は、もともとイギリス陸軍工兵部隊に属する軍人であったが、エジプトに配属されたことをきっかけに砂漠を旅し、リビア砂漠を車で縦断するなどして冒険家としても名を馳せた人物である。彼は、砂漠で、砂丘がまるで生き物のように成長し、移動する様子に魅了され、その形成過程に興味を持つようになった。ところが、当時砂丘の動力学に関する研究はあまりなかったため、バグノルドは自ら、砂漠における定量的観測、砂の輸送についての風洞実験などを行うようになり、やがて粉体物理の基礎へとその研究対象を広げていった。彼は自身をアマチュアの研究者とみなしていたが、その粉体物理についての先駆的な研究は、今でも価値を失わないものが数多くあり、英国王立協会のフェローにも選出されている [102]。

さて、バグノルドはあるとき、流体と粉体の混合物にせん断をかけたときの応力を考察した。当時は、アインシュタインによる希薄コロイド溶液の粘度についての研究 [103] のように、粉体の密度が薄く、流体の寄与がほとんどである場合に限られていたため、バグノルドは逆の極限、すなわち流体の効果が無視でき、粉体のせん断流とみなせる場合についての考察を行った [104]。この考察から生まれたのが、ここで紹介するバグノルド則¹⁶である。

¹⁶ 彼の名を冠した粉体に関する法則は複数ある。ここで紹介するものの他、風による砂の輸送に関するバグノルド則 [105] も有名であるが、両者は別のものである。

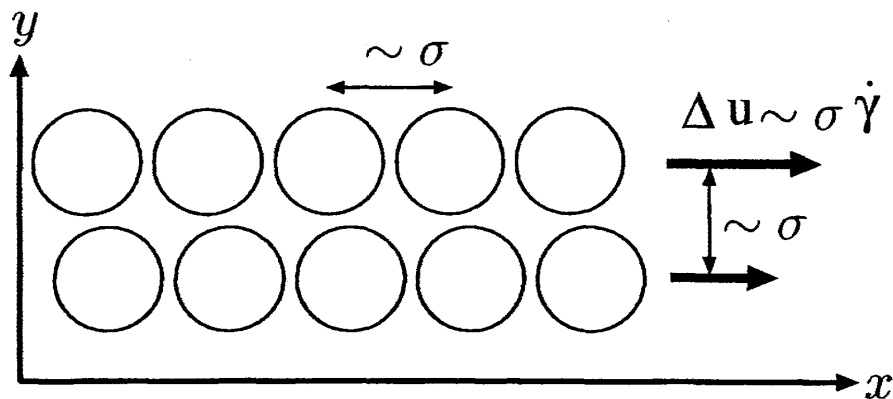


図 5: バグノルドが考えた粉体せん断流の模式図。

4.1.1 バグノルドの議論

バグノルドの 1954 年の論文 [104] での、粉体せん断流の応力の考察を簡単にまとめると、次のようなものである：直径 σ 程度の粉体粒子の、速度勾配 $\dot{\gamma}$ をもつ、比較的密度の高い定常せん断流を考える。簡単のため、粒子は図 5 のように、粒子間間隔 σ 程度で層を成して流れているものとしよう。もちろん粒子の運動には揺らぎがあるので、層間や層内で粒子同士の衝突が起こり、それが応力を生み出す。ここで、層間に働くせん断応力を見積もってみよう。単位時間単位面積当たりの運動量輸送であるせん断応力は、層間の衝突あたりの運動量輸送を Δp 、衝突頻度 Δf として、 $S \propto \Delta p \Delta f$ と見積もられる。ここで、層間の速度差 Δu は $\sigma \dot{\gamma}$ 程度であるので、隣あう層に属する粒子同士で衝突が起こったときの運動量輸送は、 $\Delta p \approx m \Delta \sigma \approx m \sigma \dot{\gamma}$ 程度だろう。一方、衝突頻度 Δf は、粒子直径程度進むのにかかる時間の逆数、 $\dot{\gamma}$ に比例すると考えられる。運動量輸送や衝突頻度の見積もりで無視した係数は、一般に体積占有率 ν に依存することも考えに入ると、最終的に

$$S = A(\nu) m \sigma^{2-d} \dot{\gamma}^2 \quad (28)$$

と見積もられる。ここで、 $A(\nu)$ は体積占有率 ν の無次元関数であり、粉体粒子のその他の無次元パラメータ（摩擦係数、反発係数など）にも一般に依存する¹⁷。同様の考察から、法線方向の運動量輸送についても

$$N = B(\nu) m \sigma^{2-d} \dot{\gamma}^2 \quad (29)$$

($B(\nu)$ は体積占有率の無次元関数) との見積もりができる。

バグノルドは、関係式 (28)(29) を、実験により検証しようとした。一つの実験は、液体中に比重を合わせたプラスチック球を分散させ、せん断をかけて応力を測るものであり、速度勾配が大きい領域では $\dot{\gamma}^2$ に比例する振る舞いが見られると主張した。しかしこの実験については、最近に

¹⁷(28) 式は、図 5 のように座標系をとった場合のせん断応力の大きさを表したものである。一般には、応力テンソルを $\Sigma_{ij} = (-P + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u}) \delta_{ij} + \tau_{ij}$ と書くとすれば、歪み速度テンソルを $\dot{\gamma}_{ij} = (1/2)(\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$ 、その二次の不変量を $\dot{\gamma} = \sqrt{2 \dot{\gamma}_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}$ として (和の規約を用いる)、 $\tau_{ij} = 2A(\nu) m \sigma^{2-d} |\dot{\gamma}| \dot{\gamma}_{ij}$ と書くべきであろう。バグノルド則は、 $|\dot{\gamma}| = 0$ が特異点になっていることに注意されたい。

なって、装置の形の関係などから液体中の渦の効果などのほうが大きかったのではないかと指摘されている [106]。

もう一つの実験は、斜面上の砂の流れについてであった。流れは定常で、流れの内部で体積占有率が変化せず¹⁸、床での流速がゼロであるとする、重力とのつりあいから、斜面方向の流速 u の深さ (y) 依存性が

$$u(y) = \frac{2}{3}(\rho g \sin \theta)^{1/2} A(\nu)^{-1/2} H^{3/2} \left[1 - (1 - y/H)^{3/2} \right] \quad (30)$$

と得られる。ここで、 $\rho(\propto \nu)$ は粉体の密度、 g は重力加速度、 θ は傾斜角、 H は流れの深さである。 y 座標は、 $y = 0$ が床、 $y = H$ が表面になるようにとった。

(30) 式は、深さ H と表面の速度 $u(H)$ の間に

$$u(H) \propto H^{3/2} \quad (31)$$

という関係を与え、これは $S \propto \dot{\gamma}$ のニュートン流体から得られる $u(H) \propto H^2$ とは明らかに異なるスケーリングである。バグノルドは、砂を斜面に流して、深さ H を変化させ、(31) と一致する実験結果を得た。

4.2 高密度な流れでのバグノルド 則の再評価

バグノルド 則 (28)(29) は、衝突による運動量輸送を考慮して導かれたことから、衝突流が満たす関係式と理解され¹⁹、特に工学の分野で広く使われてきた。一方で、その適用範囲や限界については、よく理解されていなかった部分があった。

しかし、1999 年ごろから、高密度な流れの精度のよい実験・数値実験が行われるようになってから、バグノルド 則がかなり高密度な流れまでなりたっていることがわかり、バグノルド 則のロバスト性が認識されるようになった。次に、これらの実験、数値実験と、それらのロバスト性を理解するための次元解析によるバグノルド 則の再導出を示す。

4.2.1 バグノルド 則の有効性を示した実験・数値実験

Pouliquen による斜面流の実験 Pouliquen は、バグノルドが行った斜面流の実験を、より精度よく、またより広いパラメータ範囲で行った [25]。材料は球状のガラスビーズを使い、斜面の傾斜角 θ と流れの深さ H を変えて流れを測定した。

その結果まず、図 6 のような相図が得られた。図 6 は横軸が傾斜角 θ 、縦軸は粒子直径 σ を単位で計った流れの深さである。定常流が得られる範囲は限られており、傾斜角が大きすぎたり流れが深すぎると安定な定常流れは得られない。一方、傾斜角が小さすぎたり、粉体層が浅すぎると流れは止まってしまう。そして、この流れが止まる深さは、傾斜角の減少関数となっており、Pouliquen はこれを $H_{\text{stop}}(\theta)$ と表した。

¹⁸バグノルドは、体積占有率一定の条件を「仮定」としたが、実際にはこれもバグノルド 則から導かれる。後述。

¹⁹ここで、運動論に基づく構成関係式 (19)-(22) との関係が気になると思う。それについては後述する。

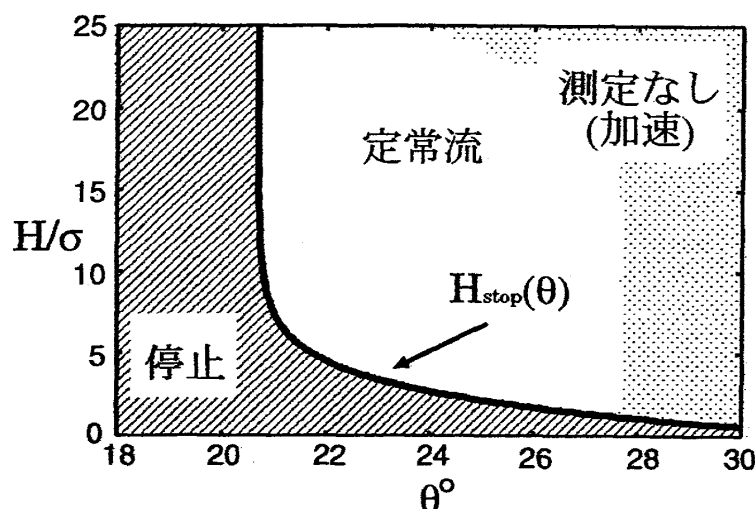


図 6: Pouliquen が文献 [25] で得た斜面流の相図の概略。この図では、定常流領域と静止領域の境界 $H_{\text{stop}}(\theta)$ を、ポリケンが得たフィッティング関数 $\tan \theta = \tan \theta_1 + (\tan \theta_2 - \tan \theta_1) \exp[-H_{\text{stop}}(\theta)/(L\sigma)]$ によって示している。

さらに彼は、様々な傾斜角 θ や層厚 H における定常流の速度 U をしらべた。その結果、 U は $H_{\text{stop}}(\theta)$ を用いて

$$\frac{U}{\sqrt{gH}} = \beta \frac{H}{H_{\text{stop}}} \quad (32)$$

とスケールできることが見出された。ここで β は、 θ や H 、粒径 σ に依存しない定数とされた。この結果は、バグノルド則による予想 (31) 式を含んでいる。しかも、 $H_{\text{stop}}(\theta)$ を用いるだけで傾斜角や粒径の依存性まで一つの式にスケールできるという結果は、単純で美しい法則が背後に潜んでいることを期待させ、斜面流が注目を集めるようになった。

Silbert らによる斜面流の数値実験 その次に行われたのが、Silbert らによる軟体球モデルを用いた重力下の斜面流の大規模な数値実験であった。彼らは、空間次元が 2 次元の場合を 3 次元の場合の両方について数値実験を行い、Pouliquen の結果 [25] を定性的に再現するとともに、数値実験の利点を生かして流れの内部のせん断応力 S 、速度勾配 $\dot{\gamma}$ 、体積占有率 ν などを測定した。その結果、流れの内部でバグノルド則 (28) がよい精度で成り立っていることが直接確認された。

さらに彼らは、体積占有率 ν が傾斜角のみで決まるようだ、という興味深い報告をした。図 7 は、我々が後の数値実験で得た 2 次元の斜面流のデータである。図 7(a) は、横軸に床からの高さ y (粒径を単位長さとした)、縦軸に体積占有率 ν を、異なる傾斜角 θ 及び層厚 H について示している。 $H = 50$ 程度の流れでは、傾斜角が大きくなるにつれて ν が小さくなるが、どのプロファイルも非常に平坦である。しかも、 $\theta = 20$ において $H = 50$ と $H = 100$ を比較すると、平らな部分が y 方向に伸びるだけで、 ν の値はほとんど変わらない。ここでは示していないが、同様な結果は、他の傾斜角でもみられる。また、床のでこぼこ具合をかえた数実験も行ったが (図中の BC2)、床 $y = 0$ 近くのプロファイルが変わっただけで、流れの内部の平らな部分の値は変わらない。すなわ

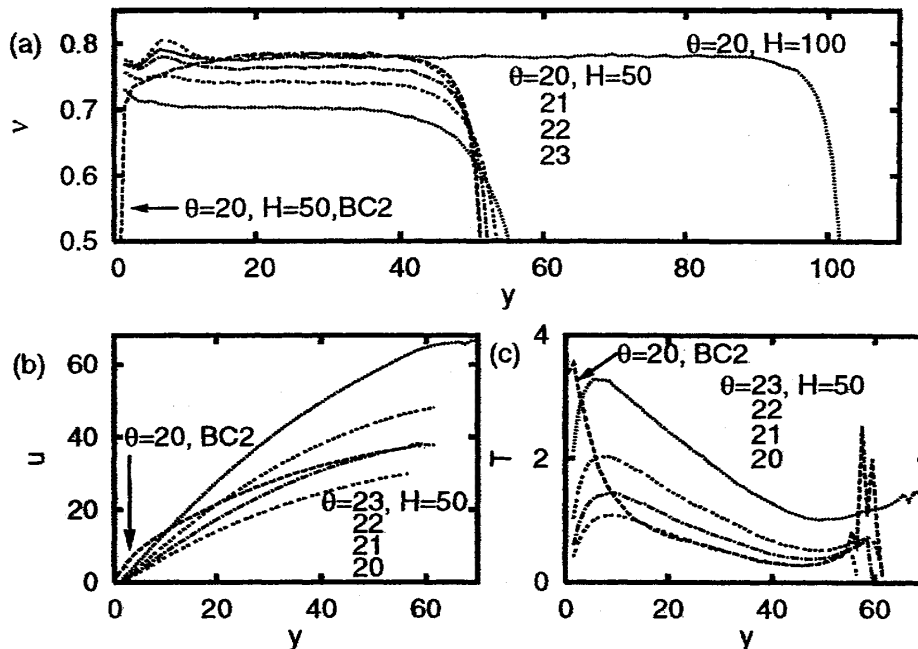


図 7: 斜面上の定常流れにおける (a) 体積占有率 ν 、(b) 速度 u 、および (c) 温度 T の深さ依存性 [7]。傾斜角 $\theta = 20^\circ, 21^\circ, 22^\circ, 23^\circ$ のデータを示した。また、 $\theta = 20$ においては、床の凹凸を変えたデータ (BC2) も示した。流れの内部では体積占有率は一定であり、その値は傾斜角 θ のみに依存する。なお、図 1(b) は、傾斜角 $\theta = 23^\circ$ の数値実験のスナップショットである [7]。

ち、(床と表面からある程度はなれた内部の) 体積占有率 ν は、 H や境界条件によらず、 y にも依存せず、傾斜角 θ だけで定まるのである。

鋭い読者はお気づきだろうが、この一定の密度プロファイルも、バグノルド則から理解できる。バグノルド則 (28)、(29) によれば、

$$\mu_{\text{eff}} \equiv \frac{S}{N} = \frac{A(\nu)}{B(\nu)} \quad (33)$$

である。ここで、せん断応力と圧力の比 μ_{eff} は、有効摩擦係数と呼ばれる。バグノルド則が成り立てば、有効摩擦係数は体積占有率で決まるということになる。一方、斜面上の定常流においては、力の釣り合いから、 $\mu_{\text{eff}} = \tan \theta$ が成り立っている。従って、(33) と合わせれば、バグノルド則が成り立てば、体積占有率 ν は傾斜角 θ だけで決まる、という結論が得られるのだ。

ところで図 7(a) の体積占有率が、0.7 から 0.8 と、かなり高いことに注意してほしい。対応するスナップショットは、図 1(b) に示されているものであるが、かなり粒子が高密度になっていることがわかるだろう。このような高密度では、衝突のみで相互作用が表されるかは自明でなく、衝突を念頭において導出されたバグノルド則の成立条件を考えなおすきっかけとなった。

4.2.2 次元解析によるバグノルド則の理解

このように、かなり高密度な流れにおいてもバグノルド則が確認されたことにより、衝突流かどうか明らかな場合でもバグノルド則がロバストに成り立つという認識が広がった。そして、

高密度流を含めてバグノルド則を説明するものとして、次元解析による導出が広く受け入れられるようになった。そこで、次元解析によるバグノルド則の導出を紹介し、どのような場合にバグノルド則が成り立つのかを再検討してみよう。

次元解析に基づくバグノルド則の導出: 粒径 σ 、質量 m の、十分硬い粒子で構成された粉体を考える。相互作用の際にはエネルギー散逸が起こるが、その動力学の詳細がレオロジーに影響するとは考えづらいので、散逸は摩擦係数や反発係数などの無次元のパラメータで特徴づけることができると仮定する。一方、流れは密度 (数密度 n または体積占有率 $\nu \propto \sigma^d n$)、速度勾配 $\dot{\gamma}$ で指定される。すると、系を特徴付ける変数 $\sigma, m, \nu, \dot{\gamma}$ のうち、時間の次元を含むものは速度勾配 $\dot{\gamma}$ だけである。したがって、せん断応力 S が正しい次元を持つという条件から、バグノルド則が導かれる。

この導出は非常に単純であるが、この次元解析の前提条件をよく考えてみよう。

まず、この次元解析には、粒子のもつエネルギーは散逸するので、定常流での粒子運動は外部からの駆動と散逸の釣り合いで決まり、温度という独立な量が無いという条件が必須である。これは、上述の解析には陽に出てこなかったが、分子・原子系のように微視的な系では、揺らぎは温度により支配され、それはエネルギー保存則の為に流れの場合とは独立に決まる。温度は時間の次元を含むので、上の次元解析は成り立たなくなる。言い換えると、粉体系では、粉体粒子の運動の揺らぎを特徴づける粉体温度 (14) は、散逸のために速度勾配 $\dot{\gamma}$ に従属して局所的に決まるのである ((17) 式参照。) [7, 107]。粉体温度が $\dot{\gamma}$ に従属するのに必要な時空間スケールは、散逸が強いほど小さく、バグノルド則はそれよりもゆっくりとしたスケールでの振る舞いを記述していることになる。また、境界で外部とエネルギーのやりとりがある場合、そのすぐ近くでは揺らぎが速度勾配に追従しきれずバグノルド則からずれる場合も多い。図 7(a) で、床の形状が違う場合に $y = 0$ 近傍での密度プロファイルが異なるのは、境界とのエネルギーのやりとりの影響と理解することができる。

もう一つの重要な条件は、粒子が十分硬いというものである。すなわちここでは、衝突や接触における粒子変形の時間スケールは、せん断流で決まる時間スケール $\dot{\gamma}^{-1}$ に比べて十分短いとして無視したのだ [108]。この条件は、柔らかい物質、または非常に速いせん断流では成り立たない。実際、高密度な斜面流の DEM シミュレーションが、粒子の硬さを変えておこなわれ、粒子が十分硬ければバグノルド則が成り立つが、粒子を柔らかくしていくとずれがみられるようになることが確かめられている [57, 58]。²⁰ また、速度勾配一定の単純せん断流において、体積占有率 ν を高くしていくと、系の圧力があがり、あるところから粒子変形が無視できなくなって、そこでもバグノルド則からのずれが現れる。後者は、ジャミング転移点付近でおこることが知られており、最近研究が進んでいる [110–115]。

また、ここでは、密度 n と速度勾配 $\dot{\gamma}$ を用いて流れを特徴づけるので、これらの量がよく定義

²⁰ 散逸がある粉体系では、「粒子が硬い」からといって、「長時間接触がない」とは限らないことに注意。[58] では、反発係数を固定して硬さを変えたときの衝突頻度の変化も調べており、硬さに対して衝突頻度が暴的に増加する傾向が見られる。これは、硬い極限では非弾性コラプスが起こり、相互作用は二体衝突のみでは表されないが、バグノルド則は成り立つということを示唆している。また、「接触する剛体」の数値実験法である接触動力学を用いた数値実験でも、粒子同士が長時間接触するパラメータ領域でもバグノルド則が成り立つことが報告されている [109]。

されている必要がある。例えば乱流のように、時空間で激しく変化するような流れがもし存在すれば、それはバグノルド則では記述できないだろう。ただし、これは n や $\dot{\gamma}$ の緩やかな時空間変化までを禁じるわけではない。実際、バグノルド則が成り立つ斜面上の定常流の速度勾配は、空間変化している (図 7(b) の速度プロファイルを参照)。ただし、空間変化がある場合は、ある場所での応力 S 、 N が、 ν や $\dot{\gamma}$ を定義するために粗視化した範囲内できまるという意味での、レオロジーの局所性が必要である。(例えば、接触力を瞬時に伝える応力鎖が、粗視化の範囲を越えてつながっていたりすると、この仮定が破れるかもしれない [116].)

また、粒子自身の回転 (角速度) の影響については、バグノルドのもととの議論では触れられていない。しかし、回転が外部から励起されるおそれのある境界の近傍以外は、粒子の角速度は通常速度場の回転 ($\nabla \times \mathbf{u}/2$) に追従する [10, 117, 118]。従って、流れの主な部分では速度勾配以外の時間スケールはあらわれず、粒子回転が無視できない時でも次元解析は成り立つといえる。

また、次元解析には粒子の形状についての仮定は陽にはでてこないもので、球状の粒子でなくてもある程度成り立つことが期待される [108]。しかし、例えば形や大きさの分散が大きいと、せん断流中で偏析がおき [98, 119, 120]、 $\dot{\gamma}$ と n だけでは特徴づけられなくなってしまうだろう。また、砂のような非常に荒い粒子では、ポリケンの実験のスケーリング則 (31) が変更を受けるといった報告もある [108]。ただ現時点では、よく制御された実験・数値実験の多くは球に近い粒子を用いて行われているので、本稿ではそれらを中心に紹介している。形状の効果の詳しい研究は今後の発展をまつ必要があるだろう。

これらの点に加えて、バグノルド自身が例として取り上げた斜面上の流れの場合は、重力加速度 g が時間の次元を含んでいることにも注意が必要である。斜面流において流れを引き起こすのは重力であり、速度勾配 $\dot{\gamma}$ や体積占有率 ν は、 g に依存している。しかし、高密度な粉体斜面流では、多くの場合、流れを記述する局所的パラメタ ν や $\dot{\gamma}$ とは独立に重力加速度が応力に入ることではない。それは、ある程度の深さのある斜面流であれば、通常その内部の密度は高く、衝突と衝突の間の粒子の軌道への重力の影響は無視できるので、流れの中の仮想面を通じた運動量のやり取りに重力が直接影響しないからである。従って、高密度流の流れの内部ではバグノルド則が成り立つ。一方で、第 3.2 節でみたような希薄な斜面流については、重力と境界からの熱流の影響が強く、バグノルド則が成り立つ領域はみられない [9]。

4.3 バグノルド則の広がり

この次元解析による理解と共に、バグノルド則のロバスト性と重要性が広く認知されるようになった。そして、粉体流研究者の間ではバグノルド則の次の一步が模索され、新しい成果が出つつある [121, 122]。

その成果をすべてここでまとめるには著者の力量が足りないが、この章の残りの部分では、バグノルド則の次元解析による理解と特に関係の深い問題として、実験や数値実験の知見を次元解析の立場から整理した研究と、著者らによる運動論に基づいた構成関係式とバグノルド則の関係についての研究を簡単に紹介したい。

4.3.1 バグノルド 則からジャミング転移へ

構成関係式を明らかにするには、実験・数値実験の結果を整理し、広く成り立つ関係式を探す作業が欠かせない。特にバグノルド 則の次元解析による理解は、今まで蓄積してきたデータを、系のもつ時間スケールという視点から見直すきっかけとなった。

それを大規模に行い、バグノルド 則の高密度流における重要性を指摘したのが、フランスの研究者たちである。彼らは、異なる研究室で行われた実験・数値実験結果を集め、流れが停止する閾値や有効摩擦係数など粉体レオロジーに重要と思われる量がどの程度ロバストか、重要な時間スケール・長さスケールを抽出できるかを総合的に検討した。検討された設定は、単純せん断、回転する円筒によるクエット流、重力による斜面上の流れ、重力下での回転ドラム中の流れなど多岐にわたった。また、特に衝突だけでは相互作用が表せないと考えられる、高密度流の結果が集められた。

彼らは、系の持つパラメータとして、速度勾配 $\dot{\gamma}$ に加えて、粉体を構成する材質のヤング率 E などの硬さを代表するパラメータ、圧力 N 、粒子の差し渡し σ 、質量 m を考え、これらから構成される二つの無次元量

$$I = \sqrt{\frac{\dot{\gamma}^2 m}{N \sigma^{d-1}}}, \quad \kappa = \frac{E}{N} \quad (34)$$

を用いてデータを整理した。²¹ これは、体積占有率 ν よりも圧力 N の方が制御しやすいことが多いためである。有効摩擦係数 μ_{eff} と体積占有率 ν が I のみの関数であり κ に依存しなければ、バグノルド 則 (28)、(29) 式が得られることがすぐにわかる。 I は、慣性数 (Inertial number) と名付けられている。

I による表示は、特に高密度領域では、(28)、(29) の ν と $\dot{\gamma}$ を用いた表式よりも扱いやすい。これは、応力の ν 依存部分 $A(\nu)$ 、 $B(\nu)$ が、 ν が高くなるにつれて発散傾向を示し、小さな ν の変化が大きな応力の変化を引き起こすためである。粒子の硬さが無限大だと、体積占有率には上限があり、上限に達したところで流れがとまる (ジャミング転移) ためこの傾向は当然であるが、高密度領域では ν の依存性を測定することは困難になる。一方、高密度領域における圧力 N の発散は、(34) 式から $I \rightarrow 0$ に対応しており、 I 依存性の方が ν 依存性よりも調べやすい [123]。

その結果は GDRMiDi (the Groupement De Recherche Milieux Divisés) の名義で出版された [108]。その中では、多くの流れで有効摩擦係数 μ_{eff} などの量が I のみで特徴付けられていることが指摘された。(34) 式以下で述べたように、物理的な状況が I の値だけで決まるのであれば、それはバグノルド 則が広く成り立つことを示唆する。

この I によるデータの整理は、その後も続けられている [123]。特に、ポリケンらのグループでは、 μ_{eff} の I 依存性を実験的に決定し、それを用いて様々な設定でのせん断の構造の予測を試みて、ある程度の成功をおさめている [124, 125]。また、ゆっくりしたせん断流領域と静止領域が共存するような系でも [126, 127]、 I を用いた記述が試みられている [128]。

²¹ 数値実験の場合は、 κ はヤング率 E ではなく相互作用の弾性力を直接特徴付けるパラメータが使われることが多い。例えば、2.1.1 節で紹介したような、バネ定数 $K = mk_n$ の線形バネで弾性力が洗われるモデルの場合、 $\kappa = K \sigma^{-d+2} / N$ を用いる。

ジャミング転移点近傍での応力 S 、 N や有効摩擦係数 μ_{eff} などの振る舞いについては、主に数値実験で詳細に調べられつつある [111–115, 123]。剛体球の場合は、変形できないので、ランダム最密充填よりも高密度につまった系にせん断をかけることは不可能である。一方、せん断流の元で、粒子の硬さを有限に固定して高密度にしていくと、いずれ粒子に強い力がかかり、粒子の硬さが有限であることが巨視的な振る舞いにも現れて、応力の振る舞いはバグノルド則からずれる。このときの応力と速度勾配、体積占有率など振る舞いが、ジャミング転移近傍の臨界現象として整理できそうなことが波多野の数値実験などで示されつつあり [113–115]、ジャミング転移の理解を大きく前進させるものとして活発に研究されている。今後の発展が期待される。

4.3.2 運動論とバグノルド則の関係

運動論におけるせん断応力の表式 (19) は、一見ニュートン流体の形をしており、バグノルド則 (28) 式とはかけ離れてみえる。しかし、次元解析の議論を信じるなら、流れが速度勾配 $\dot{\gamma}$ で特徴付けられる場合には、バグノルド則がなりたつはずである。この節では、運動論とバグノルド則の関係を見てみることにする [7, 23]。

バグノルド則が成り立つために必要なのは、散逸が支配的で、温度 T が $\dot{\gamma}$ に追従して局所的に決まっているということである。これは、次元解析のところすでに述べたが、運動論の枠組みの中では、エネルギー方程式 (17) 式の時間変化の項及び熱流束の項が、粘性発熱の項とエネルギー散逸の項に比べて無視できる場合に対応する。発熱と散逸が共に大きければ、温度はその釣り合い $S\dot{\gamma} = \Gamma$ によって局所的に決まる。これに、(19) 式、(23) 式を代入すると

$$T = [f_2(\nu)/f_3(\nu)] m\sigma^2 \dot{\gamma}^2, \quad (35)$$

が得られ、温度は $\dot{\gamma}^2$ に比例する。これを (19)、(20) 式に代入すれば、圧力とせん断応力は

$$N = m\sigma^{2-d} \frac{f_1(\nu)f_2(\nu)}{f_3(\nu)} \dot{\gamma}^2, \quad (36)$$

$$S = m\sigma^{2-d} \frac{[f_2(\nu)]^{3/2}}{[f_3(\nu)]^{1/2}} \dot{\gamma}^2 \quad (37)$$

と $\dot{\gamma}^2$ に比例し、バグノルド則が成り立つことになる。(36) 式、(37) 式から、密度の傾斜角依存性についても

$$\frac{S}{N} = \tan \theta = \frac{\sqrt{f_2(\nu)f_3(\nu)}}{f_1(\nu)} \quad (38)$$

が得られる。

斜面上の定常流の数値実験において、熱流の項 $\nabla \cdot \mathbf{q}$ を見積もると、境界から離れた流れの内部では、その効果が粘性発熱 $S\dot{\gamma}$ や散逸 Γ に比較して小さいことが確かめられている [7]²²。つまり、温度は速度勾配に追従して決まっているのである。図 7(c) には、温度の空間変化を示したが、表面の近くでは温度が低く、速度勾配が大きい床に近づくほど温度が高くなっている様子が見て取れる。

²²境界で生じた熱流の影響がどの程度まで及ぶかについては、運動論的な立場からある程度の評価がなされており、散逸が大きいほど熱流の影響が及ぶ距離は小さくなる [107]。

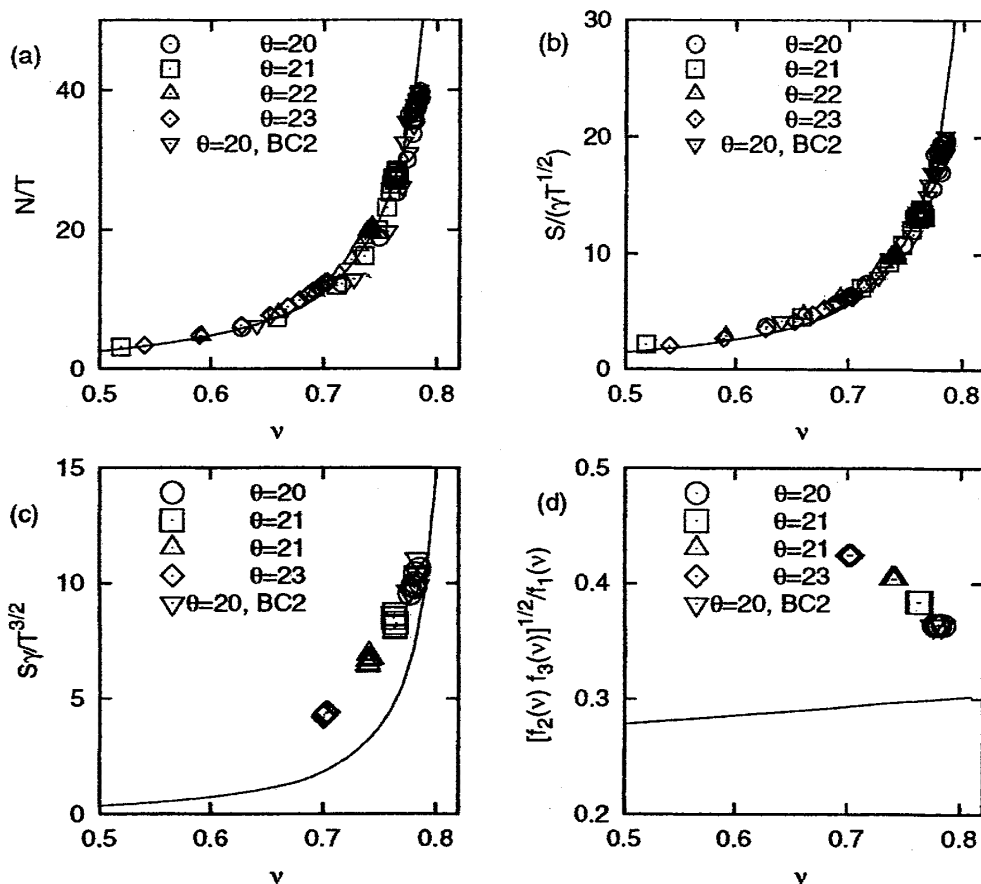


図 8: 異なる傾斜角 θ の定常流で得られた、 N/T (a) と $S/(\sqrt{T}\gamma)$ (b) を、 ν に対して表示したものの [7]。単位質量を m 、単位長さを σ 、単位時間を $\sqrt{\sigma/g}$ として表示している。床の近くのデータは、強い境界条件依存性を示すので、表面近くと内部のデータ ($y > 10$) のみを用いた。実線は運動論による $f_1(\nu)$ (a) と $f_2(\nu)$ (b) を示している。(c), (d): 流れの内部での、 $S\gamma/T^{3/2}$ 対 ν (マーク) と $f_3(\nu)$ (実線) (c), 及び $\tan \theta$ 対 ν (マーク) と $\sqrt{f_2(\nu)f_3(\nu)}/f_1(\nu)$ (実線) (d) を示した [7]。

運動論に基づいた議論の利点は、(36)、(37) 式に表れる $f_i(\nu)$ の関数形が、具体的に計算されていることである。ただし、最初に触れたように、実際には厳密な計算は不可能で、様々な近似が含まれており、特に高密度な流れについては不一致が大きくても不思議ではない。しかしそれでも、微視的な描像に基づいた理論との比較が理解の助けになることを期待して、図 7 で示した斜面上の定常流の数値実験結果と定量的に比較してみよう。数値実験及び比較の詳細は文献 [7] に譲り、ここでは大雑把な傾向のみを紹介する。

図 8 には、 N/T (a) と $S/(\gamma\sqrt{T})$ (b) が、流れの内部 (バグノルド則に従う) 及び表面近く (バグノルド則は成り立たない) のデータについて、体積占有率 ν に対してプロットされているが、点はほぼ一本の線にのり、運動論の枠組みが与える (19) 式や (20) 式に、定性的に従っていることを示している。一方実線は、濃厚気体の運動論に基づいた構成関係式 (密度の相関は動径分布関数を通じてある程度取り入れているが、速度相関は無視されている) による $f_1(\nu)$ 及び $f_2(\nu)$ であるが、データと比較的よく一致した。

エネルギー散逸率 Γ については、流れの内部で成り立つ $\Gamma = S\dot{\gamma}$ を利用して、 $S\dot{\gamma}/T^{3/2}$ を図 8(c) に示した。実線は運動論による $f_3(\nu)$ であるが、体積占有率 ν がランダム最密充填 (二次元円板では $\nu_c \approx 0.82$ [129]) に近づいたときの発散が、数値実験の方が遅いことがわかる。図 8(d) には $\mu_{\text{eff}} = \tan \theta$ を、流れの内部の体積占有率 ν に対して示したが、数値実験では、傾斜角が大きくなるにつれて密度が下がっている。一方、実線で示した運動論が与える $\tan \theta$ は、傾斜角が大きくなるほど密度が上がるといふ、定性的にも異なる結果を与えている [130]。図 8(a)–(c) でみた $f_1(\nu)$ 、 $f_2(\nu)$ 、 $f_3(\nu)$ のそれぞれの不一致の程度を考えると、 $f_3(\nu)$ (エネルギー散逸率の密度依存部分) の高密度側での強い発散が、この結果に大きく影響しているといえる。

運動論に基づく構成関係式が速度相関のない二体衝突のみを仮定しているのに対し、数値実験は高密度で様々な相関があり、また三体以上の同時接触もかなりの頻度で起こっていることを考えると、応力は、意外なほどよい一致を示したといえる。一方で、高密度領域でみられた不一致は、なんらかの相関の影響を表している可能性がある。

特に、速度相関の影響については、非弾性剛体球を用いた高密度な単純せん断流の数値実験と運動論 [67] の比較において、ある程度検討された [23]。非弾性衝突が起こると相対速度が減少するため、短距離の速度相関が生まれて流れが局所的に揃うようになり、その影響でエネルギー散逸率が下がる傾向があることが、せん断のない状況については報告されている [21, 22]。一方、せん断は相関を壊す効果があるが、非弾性衝突による速度相関の発達ほどの程度影響があるだろうか。

図 9(a) には、速度揺らぎからはかった温度 T と、衝突時の相対速度 v_c から求めた「衝突時の温度」 $\langle v_c^2 \rangle / 4$ を示した。相関がなく速度がボルツマン分布に従う気体の場合は、 $\langle v_c^2 \rangle / 4$ は温度 T と一致する。しかし、粉体せん断流においては、低密度では両者がよく一致しているが、高密度になるにつれ、多数の非弾性衝突の効果で「衝突時の温度」が下がっていることが見て取れる。この衝突時の相対速度の低下により、衝突あたりのエネルギー散逸率が下がるのである。この衝突速度の低下は、法線応力にも影響し、(20) の形の運動論に基づく構成関係式に、温度 T の代わりに「衝突時の温度」を代入すると、数値実験との一致がよくなることも確かめられた。一方、せん断応力と運動論の一致の程度は反発係数に強く依存することが見出されたが (図 9(b))、どのような効果が効いているのかを明らかにするにはさらなる研究が必要である [23]。

5 最後に

本稿では、粉体の中でも「流れ」に注目して、その振る舞いを紹介した。まず最初に、粒子が硬い極限での振る舞いを調べることで、二体衝突のみで相互作用が表される流れと、いくら硬くしても多体衝突・長時間接触が無視できない流れがあることに触れた。次に、非弾性剛体球の運動論に基づいた流体モデルについて簡単に紹介した。最後に、高密度な粉体流については、「バグノルド則」が広く成り立つことそ示し、それにまつわる研究についていくつか紹介した。本稿では紹介しきれなかった粉体流に関する重要な研究は多数あり、興味のある方は参考文献を是非参照していただきたい。

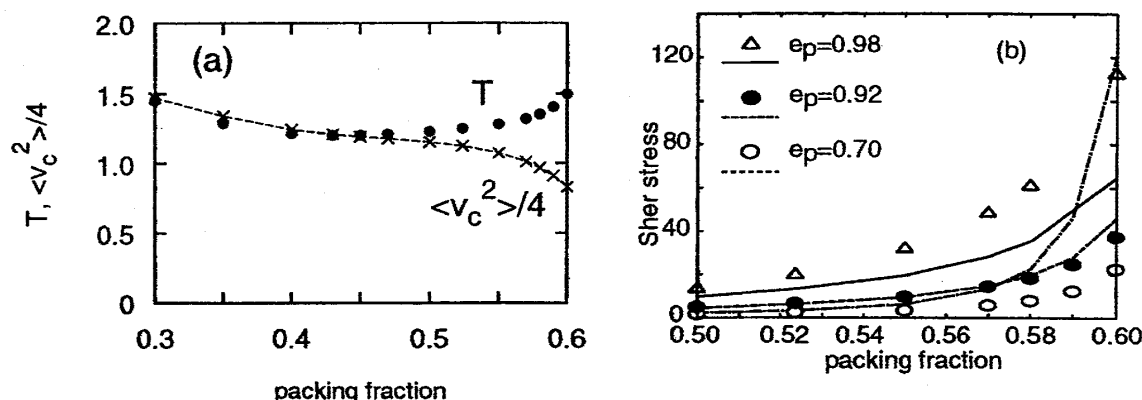


図 9: (a) 反発係数 0.92 の剛体球の単純せん断流における、速度揺らぎからはかった温度 T と、衝突時の相対速度 v_c から見積もられる「衝突時の温度」 $\langle v_c^2 \rangle / 4$ の比較 [23]。相関がなく速度がボルツマン分布に従う気体の場合は、 $\langle v_c^2 \rangle / 4$ は温度 T と一致する。図では、低密度では両者がよく一致しているが、高密度になるにつれて非弾性衝突の影響が強くなり、「衝突時の温度」が下がっている [23]。 (b) 剛体球の単純せん断流の数値実験から得られた、せん断応力の体積占有率依存性。運動論に基づいた近似理論による予測は線で示したが、反発係数 e_p が 1 に近いときは理論の方が小さい値を与え、 e_p が小さくなってくると理論の方が大きい値を与える。 $e_p = 0.92$ では一致がよい [23]。

これらの知見が統一され、気体的な振る舞いから固体的な振る舞いまでを記述できる理論が完成するのは、まだしばらくかかりそうではあるが、粉体の基礎的な性質な理解は着実に進んでいる。万一本稿をきっかけに粉体流に興味をもち、今後の進展に寄与して下さる方があらわれれば、大変うれしく思う。

本稿は、共同研究者の中西秀氏との議論なしでは生まれ得なかったものです。日頃の議論に心より感謝します。また、波多野恭弘氏の有意義なコメントに感謝します。また、本稿を書く機会を与えてくださった早川尚男氏に感謝します。もちろん、本稿の未熟な点は全て著者の責任です。本研究の一部は、日本学術振興会科学研究費補助金、理化学研究所基礎科学特別研究員研究費、稲森財団研究助成金の支援を受けました。

参考文献

- [1] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, and R. P. Behringer. *Rev. Mod. Phys.*, 68(4):1259, October 1996.
- [2] J. Duran. *Sands, Powders, and grains: introduction to the physics of granular materials*. Springer, New York, 1997.

- [3] F. P. Bowden and D. Tabor. *The Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, 1986.
- [4] H. Kuninaka and H. Hayakawa. *Phys. Rev. Lett.*, 93:154301, 2004.
- [5] 國仲寛人. 物性研究, 90(5):685, 2008.
- [6] N. Mitarai and H. Nakanishi. *Phys. Rev. E*, 67:021301, 2003.
- [7] N. Mitarai and H. Nakanishi. *Phys. Rev. Lett.*, 94:128001, 2005.
- [8] Y. Taguchi. Funryutai no dourikigaku [in japanese]. In H. Nishimori, H. Hayakawa, and Y. Taguchi, editors, *Physics of Granular Matter*, volume XI of *Selected Papers in Physics*, page 30. The Physical Society of Japan, 1999.
- [9] N. Mitarai and H. Nakanishi. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 70:2809, 2001.
- [10] N. Mitarai, H. Hayakawa, and H. Nakanishi. *Phys. Rev. Lett.*, 88:174301, 2002.
- [11] T. G. Drake. *J. Fluid Mech.*, 225:121, 1991.
- [12] E. Azanza, R. Chevoir, and P. Moucheron. *J. Fluid Mech.*, 400:199, 1999.
- [13] P. K. Haff. *J. Fluid Mech.*, 134:401, 1983.
- [14] J. T. Jenkins and S. B. Savage. *J. Fluid Mech.*, 130:187, 1983.
- [15] C. S. Campbell. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 22:57, 1990.
- [16] T. Pöschel and S. Luding, editors. *Granular Gases*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2001.
- [17] N. Sela and I. Goldhirsch. *J. Fluid Mech.*, 361:41, 1998.
- [18] I. Goldhirsch. in *Modeling in Applied Sciences: A Kinetic Theory Approach*. Birkhäuser, Boston, 2000.
- [19] H. Xu, M. Louge, and A. Reeves. *Continuum Mech. Thermodyn.*, 15:321, 2003.
- [20] T. P. C. van Noije and M. H. Ernst. *Phys. Rev. E*, 61:1745, 2000.
- [21] C. Bizon, M. D. Shattuck, J. B. Swift, and H. L. Swinney. *Phys. Rev. E*, 60:4340, 1999.
- [22] R. Kawahara and H. Nakanishi. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 73:68, 2004.
- [23] N. Mitarai and H. Nakanishi. *Phys. Rev. E*, 75:031305, 2007.

- [24] S. Douady, B. Andreotti, A. Daerr, and P. Clade. In Y. Kishino, editor, *Powders and Grains 2001*, page 443, 2001.
- [25] O. Pouliquen. *Phys. Fluids*, 11:542, 1999.
- [26] L. E. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, D. Levine, and S. J. Plimpton. *Phys. Rev. E*, 64:051302, 2001.
- [27] L. E. Silbert, G. S. Grest, S. J. Plimpton, and D. Levine. *Phys. Fluids*, 14:2637, 2002.
- [28] S. Deboeuf, E. Lajeunesse, O. Dauchot, and B. Andreotti. *Phys. Rev. Lett.*, 97:158303, 2006.
- [29] L. E. Silbert. *Phys. Rev. Lett.*, 94:098002, 2005.
- [30] D. Howell, R. P. Behringer, and C. Veje. *Phys. Rev. Lett.*, 82:5241, 1999.
- [31] C. T. Veje, D. W. Howell, and R. P. Behringer. *Phys. Rev. E*, 59:739, 1999.
- [32] M. Lätzel, S. Luding, and H. J. Herrmann. *Gran. Matt.*, 2:123, 2000.
- [33] P. Claudin, J. P. Bouchaud, M. E. Cates, and J. P. Wittmer. *Phys. Rev. E*, 57:4441, 1998.
- [34] A. Liu and S. R. Nagel. *Nature*, 396:21, 1998.
- [35] L. E. Silbert, D. Ertas, G. S. Grest, T. C. Halsey, and D. Levine. *Phys. Rev. E*, 65:051307, 2002.
- [36] C. S. O'Hern, L. E. Silbert, A. J. Liu, and S. R. Nagel. *Phys. Rev. E*, 68:011306, 2003.
- [37] S. N. Coppersmith, C. h. Liu, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. *Science*, 269:513, 1995.
- [38] C. h. Liu, S. R. Nagel, D. A. Shecter, S. N. Coppersmith, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. *Science*, 269:513, 1995.
- [39] F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau, and S. Roux. *Phys. Rev. Lett.*, 77:274, 1996.
- [40] J. Geng, G. Reydellet, , E. Clément, and R.P. Behringer. *Physica D*, 182:274, 2003.
- [41] A. Daerr and S. Dourdy. *Europhys. Lett.*, 47:324, 1999.
- [42] M. Toiya, J. Stambaugh, and W. Losert. *Phys. Rev. Lett.*, 93:088001, 2004.
- [43] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. *Geotechnique*, 29:47, 1979.

- [44] The Society of Powder Technology Japan, editor. *Funtai Simulation Nyumon (Introduction to Simulations of Granular Materials) [in Japanese]*. Sangyo Tosho, Tokyo, 1998.
- [45] J. Schäfer, S. Dippel, and D. E. Wolf. *J. Phys. I (France)*, 6:5, 1996.
- [46] B. Bernu and R. Mazighi. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 23:5745, 1990.
- [47] S. McNamara and W. R. Young. *Phys. Fluids A*, 4:496, 1992.
- [48] I. Goldhirsch and G. Zanetti. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1619, 1993.
- [49] S. McNamara and W. R. Young. *Phys. Rev. E*, 50:R28, 1994.
- [50] N. Schörghofer and T. Zhou. *Phys. Rev. E*, 54:5511, 1996.
- [51] E. Trizac and A. Barrat. *Eur. Phys. J. E*, 3:291–294, 2000.
- [52] M. Alam and C. M. Hrenya. *Phys. Rev. E*, 63:061308, 2001.
- [53] T. Pöschel, N. V. Brilliantov, and T. Schwager. *Physica A*, 325:274–283, 2003.
- [54] M. Jean and J. J. Moreau. In A. Curnier, editor, *Proceedings of Contact Mechanics International Symposium*, pages 31–48. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, Switzerland, 1992.
- [55] J. J. Moreau. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 13:93, 1994.
- [56] T. Unger, L. Brendel, D. E. Wolf, and J. Kertész. *Phys. Rev. E*, 65:061305, 2002.
- [57] L.E. Silbert, G.S. Grest, R. Brewster, and A.J. Levine. *Phys. Rev. Lett.*, 99:068002, 2007.
- [58] R. Brewster, L.E. Silbert, G.S. Grest, and A.J. Levine. *Phys. Rev. E*, 77:061302, 2008.
- [59] Hansen J.-P and I.R. MacDonald. *Theory of Simple Liquids (2nd ed.)*. Academic press, 1986.
- [60] S. Chapman and T. G. Cowling. *The mathematical theory of non-uniform gases*. Cambridge university press, Cambridge, 1970.
- [61] P. G. de Gennes. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S374, 1999.
- [62] C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, and N. Chepuruiy. *J. Fluid Mech.*, 223:223, 1984.
- [63] J. T. Jenkins and M. W. Richman. *Phys. Fluids*, 28:3485, 1985.
- [64] C. K. K. Lun. *J. Fluid Mech.*, 233:539, 1991.

- [65] J. J. Brey, J. W. Dufty, and A. Santos. *J. Stat. Phys.*, 87:1051–1066, 1997.
- [66] J. M. Montanero, V. Garzo, A. Santos, and J. J. Brey. *J. Fluid Mech.*, 389:391, 1999.
- [67] V. Garzo and J. W. Dufty. *Phys. Rev. E*, 59:5895, 1999.
- [68] N. Mitarai and H. Nakanishi. *J. Fluid Mech.*, 507:309, 2004.
- [69] K. Saitoh and H. Hayakawa. *Phys. Rev. E*, 75:021302, 2007.
- [70] P. C. Johnson and R. Jackson. *J. Fluid Mech.*, 176:67, 1987.
- [71] P. C. Johnson, P. Nott, and R. Jackson. *J. Fluid Mech.*, 210:501, 1990.
- [72] J. T. Jenkins and M. W. Richman. *J. Fluid Mech.*, 171:53, 1986.
- [73] M. W. Richman. *Acta Mechanica*, 75:227, 1988.
- [74] J. T. Jenkins. *J. Appl. Mech.*, 59:120, 1992.
- [75] Y. Forterre and O. Pouliquen. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5886, 2001.
- [76] Y. Forterre and O. Pouliquen. *J. Fluid Mech.*, 467:361, 2002.
- [77] S. N. Prasad, D. Pal, and M. J. M. Römkens. *J. Fluid Mech.*, 413:89, 2000.
- [78] D. Helbing. *Rev. Mod. Phys.*, 73:1067, 2001.
- [79] B. S. Kerner and P. Konhäuser. *Phys. Rev. E*, 48:R2335, 1993.
- [80] N. Mitarai and H. Nakanishi. *Phys. Rev. Lett.*, 85:1766, 2000.
- [81] N. Mitarai and H. Nakanishi. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 69:3752, 2000.
- [82] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Matsushita, and H. Hayakawa. *Phys. Rev. E*, 80:2833, 1998.
- [83] S. Horikawa, A. Nakahara, T. Nakayama, and M. Matsushita. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 64:1870, 1995.
- [84] S. Horikawa, T. Isoda, T. Nakayama, A. Nakahara, and M. Matsushita. *Physica A*, 233:699, 1996.
- [85] A. Nakahara and T. Isoda. *Phys. Rev. E*, 55:4264, 1997.
- [86] O. Moriyama, T. Isoda, N. Kuroiwa, M. Kanda, I. Ráfols, and M. Matsushita. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67:1616, 1998.

- [87] O. Moriyama, N. Kuroiwa, M. Kanda, and M. Matsushita. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 67:1603, 1998.
- [88] T. Raafat, J.-P. Hulin, and H. J. Herrmann. *Phys. Rev. E*, 53:4345, 1996.
- [89] J.-L. Aider, N. Sommer, T. Raafat, and J.-P. Hulin. *Phys. Rev. E*, 59:778, 1999.
- [90] T Ooshida. *Phys. Fluids*, 11:3247, 1999.
- [91] H. Hayakawa. *Phys. Rev. E*, 61:5477, 2000.
- [92] G. Lukazewicz. *Micropolar Fluids: Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston, 1999.
- [93] A. C. Eringen. *J. Math. Mech.*, 16:1, 1966.
- [94] I. Goldhirsch, S. H. Noskowitz, and O. Bar-Lev. *Phys. Rev. Lett.*, 95:068002, 2005.
- [95] J. T. Jenkins and F. Mancini. *Phys. Fluids A*, 1:2050–2057, 1989.
- [96] B. Ö Arnarson and J. T. Willits. *Phys. Fluids*, 1998.
- [97] J. T. Jenkins and D. K. Yoon. *Phys. Rev. Lett.*, 88:194301, 2002.
- [98] A. Kudrolli. *Rep. Prog. Phys.*, 67:209, 2004.
- [99] J. J. Brey, M. J. RuizMontero, and D. Cubero. *Phys. Rev. E*, 54:3664–3671, 1996.
- [100] H. Nakanishi. *Phys. Rev. E*, 67:010301, 2002.
- [101] A. Santos, V. Garzó, and J. W. Dufty. *Phys. Rev. E*, 69:061303, 2004.
- [102] R. A. Bagnold. *Sand, Wind & War – Memoirs of a Desert Explorer*. The University of Arizona Press, 1990.
- [103] A. Einstein. *Ann. Phys.*, 19:289, 1906.
- [104] R. A. Bagnold. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 225:49, 1954.
- [105] R. A. Bagnold. *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*. Springer, 1971.
- [106] M. L. Hunt, R. Zenit, C. S. Campbell, and C. E. Brennen. *J. Fluid Mech.*, 452:1, 2002.
- [107] V. Kumaran. *J. Fluid Mech.*, 506:1, 2004.
- [108] GDRMiDi. *Eur. Phys. J. E*, 14:341, 2004.
- [109] G. Lois, A. Lemaitre, and J. M. Carlson. *Phys. Rev. E*, 72:051303, 2005.
- [110] C. S. Campbell. *J. Fluid Mech.*, 465:261, 2002.

- [111] T. Hatano, M. Otsuki, and S. Sasa. *J. Phys. Soc. Jpn*, 76:023001, 2007.
- [112] T. Hatano. *Phys. Rev. E*, 75:060301(R), 2007.
- [113] T. Hatano. *arXiv:0803.2296*, 2008.
- [114] T. Hatano. *arXiv:0804.0477*, 2008.
- [115] T. Hatano. *arXiv:0807.3678*, 2008.
- [116] P. Mills, D. Loggia, and M. Tixier. *Europhys. Lett.*, 45:733, 1999.
- [117] C. S. Campbell. *J. Fluid Mech.*, 247:111, 1993.
- [118] M. Y. Louge. *Phys. Fluids*, 6:2253, 1994.
- [119] J.M. Ottino and D.V. Khakhar. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32:55, 2000.
- [120] I. S. Aranson and L. S. Tsimring. *Rev. Mod. Phys.*, 78:641, 2006.
- [121] R. Delannay, M. Louge, P. Richard, N. Taberlet, and A. Valance. *Nature Materials*, 6:99, 2007.
- [122] Y. Forterre and O. Pouliquen. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 40:1, 2008.
- [123] F. da Cruz, S. Eman, M. Prochnow, J.-N. Roux, and F. Chevoir. *Phys. Rev. E*, 72:021309, 2005.
- [124] P. Jop, Y. Forterre, and O. Pouliquen. *Nature*, 441:04801, 2006.
- [125] O. Pouliquen, C. Cassar, P. Jop, Y. Forterre, and M. Nicolas. *J. Stat. Mech.*, page P07020, 2006.
- [126] D. Fenistein and M. van Hecke. *Nature*, 425:256, 2003.
- [127] D. Fenistein, J. W. van de Meent, and M. van Hecke. *Phys. Rev. Lett.*, 92:094301, 2004.
- [128] M. Depken, W. van Saarloos, and M. van Hecke. *Phys. Rev. E*, 73:031302, 2006.
- [129] J.G. Berryman. *Phys. Rev. A*, 27:1053, 1983.
- [130] M. Y. Louge. In *Proceedings of 5th International Conference on Multiphase Flow*, page K13. ICMF, Yokohama, Japan, 2004.